

Examen national du baccalauréat

Session normale 2025

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Parcours : Sciences de la Vie et de la Terre et Sciences Physiques (option française) Code NS-22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques, suites numériques et calcul intégral	11 points

Notations

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
- e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$

- 1) a) (0.25 pt) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)
- b) (0.5 pt) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S)
- 2) Soit I le milieu du segment $[AB]$.
- a) (0.25 pt) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)
- b) (0.5 pt) Vérifier que $\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0$ puis montrer que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$
- 3) On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$
- a) (0.5 pt) Vérifier que $\vec{AB} \wedge \vec{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}$
- b) (0.25 pt) Dédire que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)
- c) (0.25 pt) Montrer que $d(O, (ABM)) = \frac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$
- 4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r
- (0.5 pt) Montrer que $r = \sqrt{2 + \frac{4}{2 + m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Nombres complexes (3.5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = \bar{a}$, $c = \frac{3(3+i)}{2}$, $d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$

- 1) a) (0.5 pt) Vérifier que $a + b = 2$ et déduire que l'affixe du point P , milieu du segment $[AB]$ est $p = 1$
- b) (0.5 pt) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$
- 2) a) (0.5 pt) Vérifier que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$
- b) (0.25 pt) Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC
- 3) a) (0.25 pt) Vérifier que $\frac{d - c}{a - b} = \frac{3}{4}i$
- b) (0.5 pt) Montrer que $d - b = (c - a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires
- 4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P) = G$
- a) (0.25 pt) Vérifier que $z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$
- b) (0.25 pt) Montrer que l'affixe du point G est $g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i$
- 5) (0.5 pt) Montrer que les points Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (2.5 points)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

A « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »

B « Les deux boules tirées sont de même couleur »

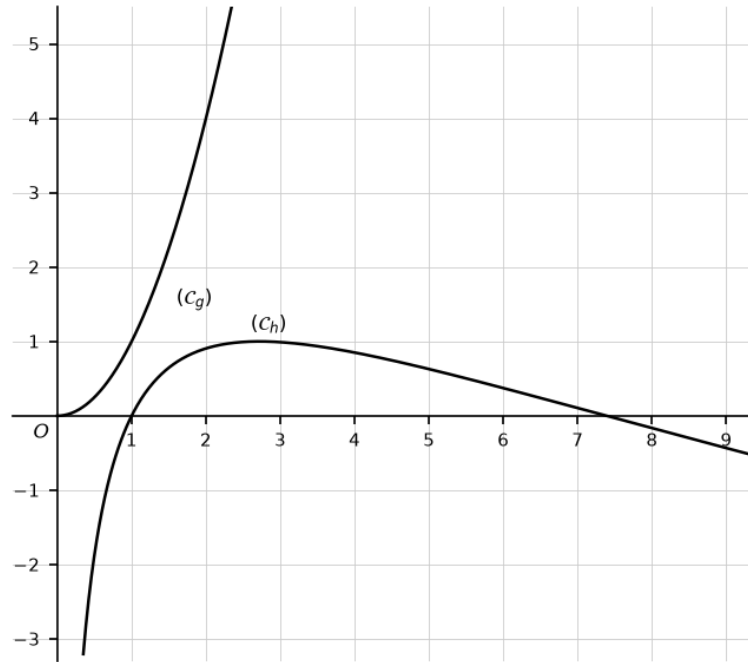
- 1) a) (0.5 pt) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$
- b) (0.5 pt) Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$
- c) (0.5 pt) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? justifier.
- 2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'évènement A .
- a) (0.75 pt) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de X

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{27}{125}$			

- b) (0.25 pt) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X

Problème (11 points)

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions : $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2 \ln x - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ dans un même repère orthonormé.



- 1) a) (0.25 pt) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0, +\infty[: g(x) - h(x) > 0$
- b) (0.5 pt) Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[: \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$
- 2) a) (0.5 pt) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2} \ln(x) dx = 1 + e^2$
- b) (0.5 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2e^2 - 2$
- c) (0.5 pt) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ avec l'axe des abscisses.
- d) (0.5 pt) Dédire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_h)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

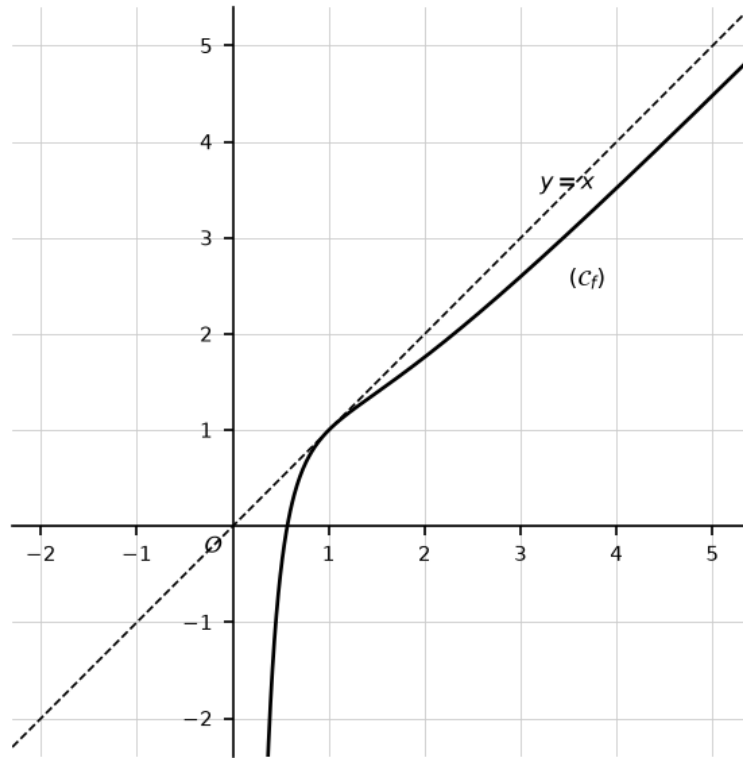
Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) (0.5 pt) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
- b) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser $t = \sqrt{x}$), puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- c) (0.5 pt) Dédire que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
- 2) a) (0.75 pt) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$
- b) (0.5 pt) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (On peut utiliser la question Partie I-1-b)
- 3) a) (0.5 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- b) (0.75 pt) Vérifier que $e^{-1} < \alpha < 1$ et montrer que $\ln \alpha = -\alpha$.

- c) (0.25 pt) Montrer que $f(x) \leq x$, pour tout $x \in]0, +\infty[$
- d) (0.5 pt) Montrer que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1
- 4) Le graphique ci-contre représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0, 1]$

- a) (0.5 pt) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}(x)$)
- b) (0.5 pt) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$
- c) (0.75 pt) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) (0.5 pt) Montrer par récurrence que $1 < u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$
- 2) a) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)
- b) (0.25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- c) (0.5 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n) .