

Examen national du baccalauréat — Session de rattrapage 2024

Solutions cachées (cliquer sur les boutons)

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (Sciences de la vie et de la terre et Sciences physiques) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1, 1, 0)$ et $\Omega(-1, 1, -2)$ et le plan (P) d'équation $x + z - 1 = 0$

1) a) (0,5 pt) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P) .

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$

a) (0,5 pt) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (Q_m) un plan d'équation $x + y + mz - 2 = 0$, où m est un nombre réel.

a) (0,25 pt) Vérifier que A est un point du plan (Q_m) , pour tout m de $\mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (4 points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

1) (0,25 pt) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Résoudre l'équation (E)

► Afficher / Masquer la solution

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$.

1) a) (0,25 pt) Vérifier que $|a| = 3$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Vérifier que $\frac{a-c}{b-c} = i$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Déduire la nature du triangle ABC

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,5 pt) Déterminer l'abscisse du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $ADBC$ est un carré.

► Afficher / Masquer la solution

4) On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1 - x_n}$, avec n un entier naturel non nul.

a) (0,25 pt) Vérifier que $x_n \overline{x_n} = 1$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (2 points)

Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

1) (0,25 pt) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Calculer la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches ».

► Afficher / Masquer la solution

3) (0,75 pt) Montrer que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \frac{5}{56}$

► Afficher / Masquer la solution

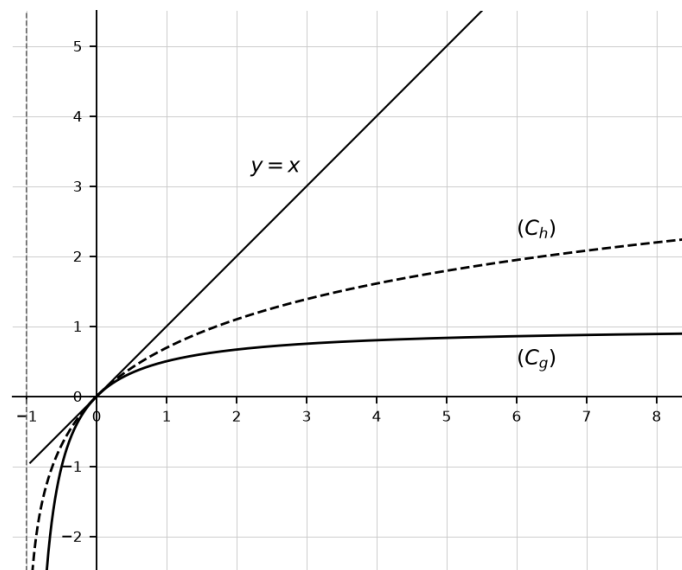
4) (0,5 pt) Calculer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

► Afficher / Masquer la solution

Problème (11 points)

Partie I :

La figure ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.



1) a) (0,5 pt) A partir de cette figure, justifier que : $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $] -1, +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $] -1, +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Prouver que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,75 pt) Déterminer la limite de (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) (0,5 pt) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1}{1 + e^x} - e^{-x} \ln(1 + e^x)$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x - (1 + e^x) \ln(1 + e^x)}{e^x (1 + e^x)}$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Dédurre que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,5 pt) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Vérifier que la tangente (T) passe par le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) Construire (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prend $\ln 2 \approx 0,7$)

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,5 pt) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$

► Afficher / Masquer la solution

5) Soit λ un réel strictement positif.

a) (0,25 pt) Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$)

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Dédire en fonction de λ , l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$

► Afficher / Masquer la solution

e) (0,5 pt) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$

► Afficher / Masquer la solution