

Examen national du baccalauréat — Session normale 2024

Sujet

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- Ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n

1) a) (0,25 pt) vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

b) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .

2) a) (0,25 pt) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie $v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$ pour tout entier naturel n .

a) (0,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) (0,5 pt) Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n .

c) (0,5 pt) Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5.

1) (0,25 pt) Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

2) (0,5 pt) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) .

3) a) (0,5 pt) Vérifier que la distance du point au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$.

- b) (0,25 pt) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
- 4) a) (0,5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) .
- b) (0,5 pt) Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ) .
- c) (0,5 pt) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 3 : Nombres complexes (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

- 1) (0,5 pt) Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$.
- 2) a) (0,75 pt) Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- b) (0,75 pt) En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.
- 3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$.
- a) (0,5 pt) Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12} [2\pi]$ où a' est l'affixe du point A' .
- b) (0,5 pt) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O , A'' et B sont alignés.
- c) (0,5 pt) Montrer que b' , l'affixe de B' , vérifie $b' = \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$.
- d) (0,5 pt) En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O .

Exercice 4 : Calcul des probabilités (2 points)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées portent le même numéro »

B : « la somme des numéros des boules tirées est 4 »

- 1) (0,5 pt) Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.
- 2) (0,5 pt) Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$.
- 3) (0,5 pt) Calculer $p(A \cap B)$.
- 4) (0,5 pt) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Problème (8 points)

Partie I :

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

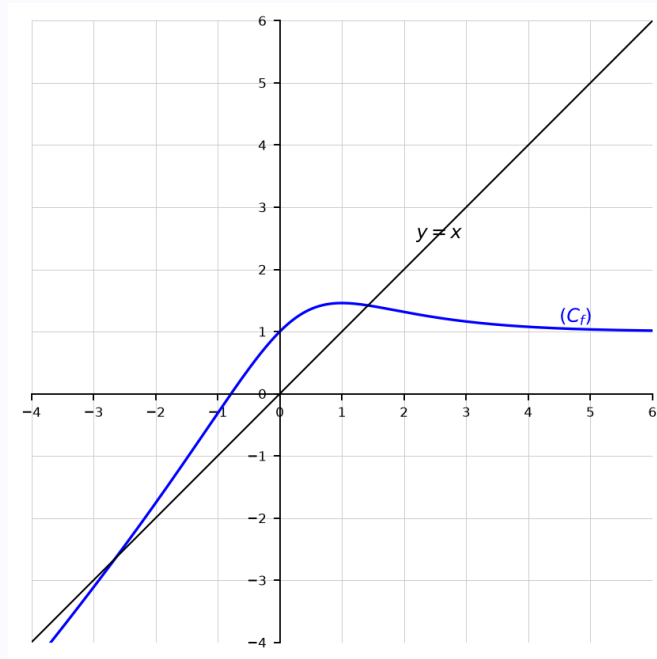
- 1) (0,5 pt) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v .
- 2) (0,25 pt) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 3) (0,5 pt) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u) , la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

- 1) a) (0,25 pt) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- b) (0,5 pt) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$.
- c) (0,5 pt) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 2) a) (0,25 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- b)** (0,5 pt) Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$.
- c)** (0,75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.
- 3) a)** (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$
- b)** (0,5 pt) Etudier le signe de la fonction dérivée de f , puis déduire le tableau de variations de f .
- c)** (0,75 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -1, 0[$.
- 4)** La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.


 Courbe (C_f) et la droite d'équation $y = x$

- a)** (0,5 pt) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β .
- b)** (0,5 pt) Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$
- 5)** Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =] -\infty, 1]$.
- a)** (0,5 pt) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)
- b)** (0,75 pt) Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.