

Examen national du baccalauréat — Session normale 2023

Sujet

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 24F (page 1) / NS 22F (pages suivantes) — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis Suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques Et des uites numériques	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les Points $A(0, 1, 4)$, $B(2, 1, 2)$, $C(2, 5, 0)$ et $\Omega(3, 4, 4)$

1) a) (0,25 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4 \left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \right)$

b) (0,5 pt) En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B, (AC))$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

a) (0,5 pt) Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4} \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right)$

b) (0,25 pt) En déduire que $d(\Omega, (ABC)) = 3$

3) Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

a) (0,5 pt) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

b) (0,5 pt) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

4) (0,5 pt) Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe la sphère (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

1) (0,25 pt) Ecrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique

2) a) (0,25 pt) Vérifier que $b - d = c$

b) (0,5 pt) Montrer que $\left(\sqrt{2} + 1 \right) (b - a) = b - d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés

3) a) (0,25 pt) Vérifier que $a c = 2b$

b) (0,5 pt) En déduire que $2 \arg(b) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du Plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

- a) (0,25 pt) Montrer que $z' = \frac{1}{2} a z$
- b) (0,5 pt) En déduire que $R(\vec{C}) = B$ et que $R(A) = D$
- c) (0,5 pt) Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) a$, puis déduire une mesure de l'angle $(\vec{AC}, \vec{AB})$

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher

On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met Dans l'urne U_2 , ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle Porte »

On considère les événements suivants :

— A : « la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 »

— B : « le produit ab est égal à 2 »

1) a) (0,5 pt) Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A

b) (0,5 pt) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités)

2) (0,75 pt) Calculer $p(A/B)$; la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est Réalisé.

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le Produit ab

a) (0,25 pt) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

b) (0,5 pt) Donner la loi de probabilité de X (remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 4)

c) (0,5 pt) On considère les événements :

— M : « le produit ab est pair ou nul »

— N : « le produit ab est égal à 1 »

Montrer que les événements M et N sont équiprobables

Problème (11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) a) (0,25 pt) Vérifier que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f(x) = \frac{3x - 2 - 2x \ln x + x(\ln x)^2}{x}$

b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$)

c) (0,5 pt) Déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

d) (0,75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(1 - x + x \ln x)}{x^2}$

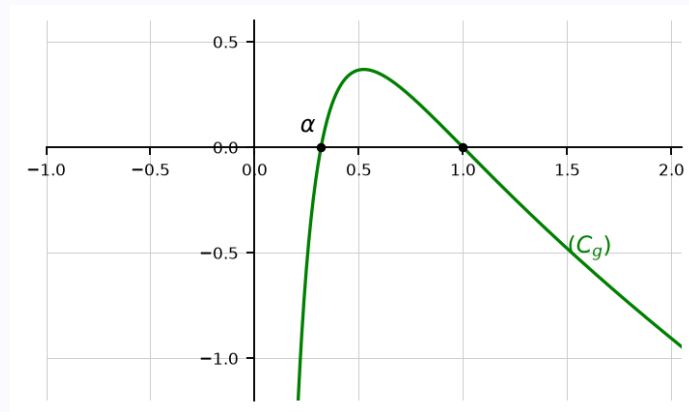
3) En expliquant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]0, +\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$f'(\beta)$	0

(on donne $\beta \simeq 4,9$)

- a)** (0,5 pt) Prouver que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f
b) (0,5 pt) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0, +\infty[$
c) (1 pt) Dédire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexion
4) La courbe (C_g) ci-contre est la représentation Graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ Et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \simeq 0,3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$



- a)** (0,5 pt) A partir de la courbe (C_g) , déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$
b) (0,5 pt) Dédire que la droite (Δ) est en dessous de (C_f) sur l'intervalle $[\alpha, 1]$ et est au dessus de (C_f) sur les intervalles $]0, \alpha]$ et $[1, +\infty[$
5) (1,5 pt) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
(on prend $\alpha \simeq 0,3$; $\beta \simeq 4,9$ et $f(\beta) \simeq 1,9$)
6) a) (0,5 pt) Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x \ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha, 1]$
b) (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_{\alpha}^1 (1 - \ln x)^2 dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - \ln \alpha) \ln \alpha$
c) (0,75 pt) Dédire en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$
7) Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]\alpha, 1[$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
a) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $\alpha < u_n < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4)b))
c) (0,75 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite