

Examen national du baccalauréat — Session normale 2022

Sujet

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Equations différentielles et calcul intégral	2,5 points
Problème	Etude des fonctions numériques et des suites numériques	8,5 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points $A(0, 1, 1)$; $B(1, 2, 0)$ et $C(-1, 1, 2)$.

- 1) a) (0,5 pt) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$
- b) (0,25 pt) En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) (0,5 pt) Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1, 1, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$. Déterminer une équation de la sphère (S) .
- 3) (0,5 pt) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A .
- 4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC) .
 - a) (0,25 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
 - b) (0,5 pt) Montrer que la droite (Δ) est une tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.
 - c) (0,5 pt) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot (\vec{i} + \vec{k})$, puis en déduire la distance $d(A, (\Delta))$.

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

- 1) (0,5 pt) Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$.
- 2) (0,5 pt) On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$.
- 3) a) (0,5 pt) Ecrire le nombre complexe $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique.
- b) (0,5 pt) En déduire que : $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

- 4) Soit (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ') .
- a) (0,25 pt) Vérifier que : $|z + 2| = 2$
- b) (0,5 pt) Prouver que : $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$).
- c) (0,25 pt) En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard simultanément trois boules de l'urne.

- 1) (0,75 pt) Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'événement « N'obtenir aucune boule rouge ».
- 2) (0,75 pt) Calculer $p(B)$; où B est l'événement « Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes ».
- 3) (0,75 pt) Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'événement « Obtenir exactement une boule rouge ».
- 4) (0,75 pt) Calculer $p(D)$; où D est l'événement « Obtenir au moins deux boules rouges ».

Exercice 4 : Equations différentielles et calcul intégral (2,5 points)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x + 1)e^x$.

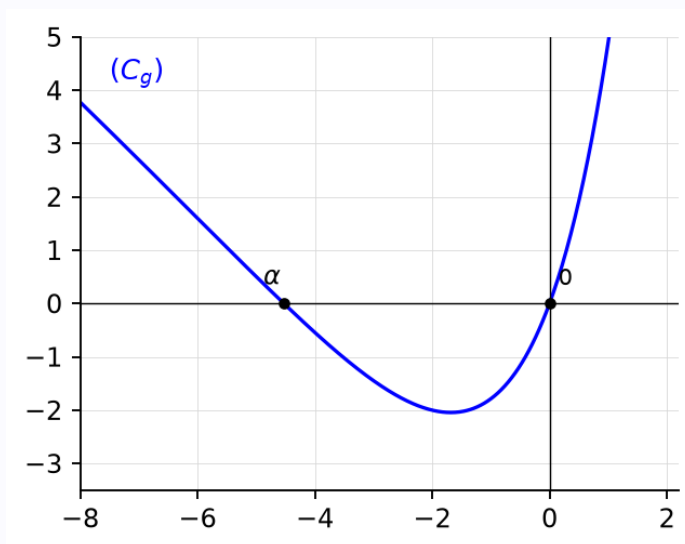
- 1) a) (0,75 pt) Vérifier que la fonction $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^0 h(x) dx$.
- b) (0,75 pt) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_{-1}^0 (x + 1)^2 e^x dx$.
- 2) a) (0,5 pt) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$.
- b) (0,5 pt) Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$.

Problème — Etude des fonctions et suites numériques (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(e^{x/2} - 1)^2$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1) (0,5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) (0,5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat géométriquement.
- 3) a) (0,5 pt) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
- b) (0,5 pt) Etudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) .
- 4) a) (0,5 pt) Montrer que : $f'(x) = (e^{x/2} - 1)^2 + xe^{x/2}(e^{x/2} - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- b) (0,5 pt) Vérifier que $x(e^{x/2} - 1) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
- c) (0,5 pt) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 5) a) (0,5 pt) Montrer que : $f''(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}g(x)$; où $g(x) = (2x + 4)e^{x/2} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- b) (0,5 pt) A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarquer que $g(\alpha) = 0$).



- c) (0,5 pt) Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexion.
- 6) (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prend $\ln 4 \simeq 1,4$, $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$).
- 7) a) (0,5 pt) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
- b) (0,25 pt) Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$.
- 8) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- a) (0,5 pt) Montrer par récurrence que : $0 < u_n < \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- c) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- d) (0,5 pt) Calculer la limite de la suite (u_n) .