

Examen national du baccalauréat

Session normale 2021

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Analyse	2 points
Exercice 2	Suites numériques	4 points
Exercice 3	Nombres complexes	5 points
Problème	Etude des fonctions et calcul intégral	9 points

Exercice 1 : Analyse (2 points)

- 1) **a)** (0.5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$
- 1) **b)** (0.5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$
- 1) **c)** (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$
- 2) (0.5 pt) Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

Exercice 2 : Suites numériques (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) (0.25 pt) Calculer u_1
- 2) (0.5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$
- 3) **a)** (0.5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$
- 3) **b)** (0.5 pt) En déduire la monotonie de la suite (u_n)
- 4) **a)** (0.75 pt) Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis calculer la limite de la suite (u_n)
- 4) **b)** (0.5 pt) On pose $v_n \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
- 5) **a)** (0.5 pt) Vérifier que tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$
- 5) **b)** (0.5 pt) En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

Exercice 3 : Nombres complexes (5 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2) Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) a) (0.25 pt) Ecrire a sous forme algébrique.

2) b) (0.5 pt) Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les Points A , B et C d'affixes respectives a , b et $\bar{a}$.

3) (0.5 pt) Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4) Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4) a) (0.5 pt) Ecrire z' en fonction de z et a .

4) b) (0.25 pt) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R , montrer que $d = a + 1$.

4) c) (0.5 pt) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

5) a) (0.75 pt) Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre Complexe $d - b$

5) b) (0.5 pt) Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

5) c) (0.5 pt) Déduire une mesure de l'angle $(\vec{BI}, \vec{BD})$.

Problème (9 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln x - 2x$, si $x > 0$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

1) (0.5 pt) Montrer que f est continue à droite au point 0.

2) a) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) b) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

3) a) (0.75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

3) b) (0.5 pt) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$

3) c) (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

4) a) (0.5 pt) Résoudre dans l'intervalle $[0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$

4) b) (1 pt) Construire (C) la courbe dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,5$)

5) a) (0.5 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{1+e^2}{4}$

5) b) (0.5 pt) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^e f(x) \, dx$

6) a) (0.25 pt) Déterminer le minimum de f sur $]0, +\infty[$

6) b) (0.5 pt) En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

7) Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

7) a) (0.5 pt) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

7) b) (0.75 pt) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de g^{-1} .

8) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x & ; x > 0 \end{cases}$$

8) a) (0.5 pt) Etudier la continuité de la fonction h au point 0

8) b) (0.5 pt) Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0, puis interpréter géométriquement le résultat.

8) c) (0.25 pt) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.