

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2019

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique — Calcul intégral et suites numériques	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(1, 2, 2)$, $B(3, -1, 6)$ et $C(1, 1, 3)$.

Remarque : coquille de l'énoncé officiel, le point B y est donné par $(2, -1, 6)$; il faut lire $B(3, -1, 6)$.

- 1) a) (0.75 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$
- b) (0.5 pt) En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2) (0.75 pt) Soient les points $E(5, 1, 4)$ et $F(-1, 1, 12)$ et soit (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 1, 8)$ et de rayon $R = 5$.
- 3) a) (0.5 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC) .
- b) (0.5 pt) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

- 1) a) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.
- b) (0.5 pt) On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.
- 2) (0.5 pt) On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, vérifier $b^2 = i$.
- 3) (0.5 pt) On pose $h = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$.
- 4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- a) (0.5 pt) Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R . Montrer que $c = ib$.

b) (0.25 pt) En déduire la nature du triangle OBC .

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Soient les événements suivants : - A : « les trois boules tirées sont de même couleur » - B : « il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées » - C : « il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées »

1) (2 pt) Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{8}{27}$.

2) (1 pt) Calculer $p(C)$.

Problème (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8 \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 e^{x-4}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) a) (0.5 pt) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

b) (0.5 pt) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) a) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) (0.5 pt) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) (0.75 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b) (0.25 pt) Vérifier que pour tout réel x , $x^2 - 2x + 4 > 0$.

c) (0.75 pt) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et est strictement croissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $[2, +\infty[$.

d) (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

4) (1 pt) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

5) a) (0.5 pt) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x} e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2} e^{x-4}$ sur $[2, 4]$.

b) (0.25 pt) Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32 \frac{(x-1)}{x^2} e^{x-4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

c) (0.5 pt) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4} dx$.

d) (0.75 pt) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Deuxième partie :

1) On considère la fonction numérique g définie sur $[2, 4]$ par : $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.

a) (0.25 pt) Calculer $g(4)$.

b) (0.5 pt) Vérifier que pour tout $x \in [2, 4]$, $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$.

c) (0.5 pt) Vérifier que pour tout $x \in [2, 4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$, et en déduire que pour tout $x \in [2, 4]$: $g(x) \leq 0$.

2) a) (0.5 pt) Vérifier que pour tout $x \in [2, 4]$, $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2} \right) g(x)$.

b) (0.25 pt) En déduire que pour tout $x \in [2, 4]$, $f(x) \leq x$.

3) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) (0.5 pt) Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- b)** (*0.5 pt*) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.
- c)** (*0.75 pt*) Calculer la limite de la suite (u_n) .