

Examen national du baccalauréat

Session normale 2017

Mathématiques – 2BAC PC SVT (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et des suites numériques	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (P) passant par le point $A(0, 1, 1)$ et dont $\vec{u}(1, 0, -1)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0, 1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1) a) (0.5 pt) Montrer que $x - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1, 1, 0)$ est le point de contact.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.25 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point $C(1, 1, 0)$.

► Afficher / Masquer la solution

3) (0.75 pt) Montrer que $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre parmi les nombres suivants : 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 4.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1) (1.5 pt) Soit A : « Parmi les trois boules tirées, aucune boule ne porte le nombre 0 » B : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égal à 8 »

Montrer que : $p(A) = \frac{5}{14}$ et que $p(B) = \frac{1}{7}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

a) (0.5 pt) Montrer que : $p(X = 16) = \frac{3}{28}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	0	4	8	16
$p(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

On considère les nombres complexes a et b tels que $a = \sqrt{3} + i$ et

$$b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i.$$

1) a) (0.25 pt) Vérifier que : $b = (1 + i)a$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que $|b| = 2\sqrt{2}$ et que $\arg b \equiv \frac{5\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Déduire de ce qui précède que : $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe $c = -1 + i\sqrt{3}$.

a) (0.75 pt) Vérifier que $c = ia$ et en déduire que $OA = OC$ et que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) En déduire que le quadrilatère $OABC$ est un carré.

► Afficher / Masquer la solution

Problème (11 points)

I – Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x.$$

1) (0.25 pt) Vérifier que $g(1) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (1 pt) À partir du tableau de variations de la fonction g ci-dessous :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

II – On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x.$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.25 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}$) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0.5 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que la courbe ($\mathcal{C}$) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, 2]$ et en déduire la position relative de la courbe ($\mathcal{C}$) et de la droite (D) sur l'intervalle $[1, 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

5) (1 pt) Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ (on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède un point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5).

► Afficher / Masquer la solution

6) a) (0.5 pt) Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.25 pt) Montrer que la fonction $H : x \mapsto 2 \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) \ln x \, dx = (1 - \ln 2)^2.$$

► Afficher / Masquer la solution

d) (0.5 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

► Afficher / Masquer la solution

III – On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1) (0.5 pt) Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser la question II-4)c)).

► Afficher / Masquer la solution

3) (0.75 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution