Examen national du baccalauréat

Session normale 2016

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (option française) Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
— Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8,5 points

Exercice 1 : Suites numériques (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1) *(0,75 pt)* Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout entier naturel n, puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2) Soit la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout entier naturel n

a) *(0,75 pt)* Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout entier naturel n, puis écrire u_n en fonction de n

▶ **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,5 pt)* Déterminer la limite de la suite (u_n)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 3)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

► **Afficher / Masquer la solution**

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, -1, 0)$ et pour rayon 6

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)

► **Afficher / Masquer la solution**

3) a) *(0,5 pt)* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que le point est le centre du cercle (Γ)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) *(0,75 pt)* Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives ω, a et b telles que $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$

a) *(0,75 pt)* Soit u le nombre complexe tel que $u = b - \omega$

Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,25 pt)* Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,75 pt)* Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

d) *(0,5 pt)* On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

1) *(1 pt)* Soit A l'événement : « Les deux boules tirées sont rouges »

Montrer que $p(A) = \dfrac{2}{15}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges Restantes dans l'urne après le tirage de deux boules.

a) *(0,5 pt)* Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(1,5 pt)* Montrer que $p(X=3)=\dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

► **Afficher / Masquer la solution**

Problème (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^{x}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm)

A- 1) a) *(0,25 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

► **Afficher / Masquer la solution**

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3) a) *(0,5 pt)* Montrer que $f'(x) = 2\left(e^x - 1\right)^2$ pour tout réel x

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,25 pt)* Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

(Remarquer que $f'(0) = 0$)

▶ **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,75 pt)* Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

4) a) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, -5)$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,75 pt)* Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

5) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^x\right) dx = -\frac{9}{2}$

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$

► **Afficher / Masquer la solution**

B-1) a) *(0,5 pt)* Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

► **Afficher / Masquer la solution**

2) Soit la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right)$$

a) *(0,75 pt)* Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

► **Afficher / Masquer la solution**

FIN