

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2015

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- 1) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 2) (0,75 pt) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante.
- 3) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4) Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - a) (0,75 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n .
 - b) (0,75 pt) En déduire que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan (P) d'équation $2x - z - 2 = 0$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$.

- 1) (1 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(-1, 0, 1)$ et son rayon est 3.
- 2) a) (0,5 pt) Calculer la distance du point Ω au plan (P) .
- b) (0,5 pt) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .

Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (Γ) .

- 3) (1 pt) Montrer que le rayon du cercle (Γ) est 2 et déterminer les coordonnées du point H centre du cercle (Γ) .

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

- 1) a) (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8z + 32 = 0$.

- b) (0,75 pt) On considère le nombre complexe a tel que $a = 4 + 4i$.

Ecrire le nombre complexe a sous sa forme trigonométrique puis en déduire que a^{12} est un nombre réel négatif.

- 2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tels que :

$$a = 4 + 4i, \quad b = 2 + 3i \quad \text{et} \quad c = 3 + 4i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a) (0,5 pt) Montrer que : $z' = iz + 7 + i$.
- b) (0,5 pt) Vérifier que d l'affixe du point D image du point A par la rotation R est $3 + 5i$.
- c) (0,5 pt) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 3 - 5i| = |z - 4 - 4i|$ est la droite (BC) .

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 5 jetons : deux jetons blancs , deux verts et un rouge (les jetons sont indiscernables au toucher).

On tire au hasard successivement et avec remise trois jetons de l'urne .

1) (1 pt) Soit l'événement A : “les trois jetons tirés sont de même couleur”.

Montrer que $p(A) = \frac{17}{125}$.

2) (2 pt) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de jeton(s) blanc(s) tirés.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Problème (8 points)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x + x \ln x$.

1) a) (0,5 pt) Montrer que $g'(x) = \ln x$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) (0,5 pt) Montrer que la fonction g est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

2) (0,75 pt) Calculer $g(1)$ et en déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln x}{x}$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1cm).

1) (0,75 pt) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(pour calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$; remarque que $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$).

2) (0,75 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et en déduire la branche infinie de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3) a) (0,75 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) (0,25 pt) Interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$.

c) (0,5 pt) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$.

4) (0,75 pt) Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) .

(On admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexion tels que 1 est l'abscisse de l'un de ces deux points et l'abscisse de l'autre est comprise entre 2 et 2,5 et on prendra $f(0,3) = 0$)

5) a) (0,5 pt) Montrer que : $\int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = 1$.

b) (0,75 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

6) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x^2)}{|x|}$.

a) (0,75 pt) Montrer que la fonction h est paire et que $h(x) = f(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

b) (0,5 pt) Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C') représentant la fonction h .