

Examen national du baccalauréat

Session normale 2015 (épreuve repassée)

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Code RS 22 — Durée : 3 h
— Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan (P) d'équation $x + y + z + 4 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1; -1; -1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

- 1) a) (0,75 pt) Calculer la distance $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)
- b) (0,5 pt) Vérifier que le point $H(0; -2; -2)$ est le point de contact du plan (P) et la sphère (S)
- 2) On considère les deux points $A(2; 1; 1)$ et $B(1; 0; 1)$
- a) (0,75 pt) Vérifier que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)
- b) (0,5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω est orthogonale au plan (OAB)
- c) (0,5 pt) Déterminer les coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S)

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

- 1) (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 10z + 26 = 0$
- 2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A, B, C et Ω d'affixes respectifs a, b, c et ω tels que : $a = -2 + 2i, b = -5 + i, c = -5 - i$ et $\omega = -3$
- a) (0,5 pt) Montrer que : $\frac{b - \omega}{a - \omega} = i$
- b) (0,5 pt) En déduire la nature du triangle ΩAB
- 3) Soit le point D image du point C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6 + 4i$
- a) (0,5 pt) Montrer que l'affixe d du point D est $1 + 3i$
- b) (0,75 pt) Montrer que : $\frac{b - d}{a - d} = 2$ et en déduire que le point A est le milieu du segment $[BD]$

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit boules : 3 boules rouges, 3 boules vertes et deux boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne

- 1) (1,5 pt) On considère l'événement A suivant : “tirer une boule blanche au moins”

et l'événement B suivant : “tirer deux boules de même couleur”

Montrer que : $p(A) = \frac{13}{28}$ et $p(B) = \frac{1}{4}$.

- 2) Soit X la variable aléatoire qui égale au nombre de boules blanches tirées

- a) (0,5 pt) Montrer que $p(X = 2) = \frac{1}{28}$
- b) (1 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$

Problème (11 points)**Partie I**

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$.

- 1) (0,75 pt) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $] -\infty, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$.
- 2) (0,5 pt) Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.
- 3) (0,5 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$. et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm).

- 1) a) (1 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

(remarquer que $e^x - 2x = x \left(\frac{e^x}{x} - 2 \right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

- b) (0,5 pt) Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

- 2) a) (0,75 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

- b) (0,75 pt) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

- c) (0,25 pt) Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O origine du repère.

- 3) (1 pt) Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C) .

(on prendra $\frac{1}{e-2} \approx 1,4$ et on admettra que la courbe (C) a deux points d'inflexion l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0, 1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$).

- 4) a) (0,75 pt) Montrer que $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

- b) (0,75 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

- c) (0,5 pt) Soit, en cm^2 , $A(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

Partie III

Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -\infty; 0]$: $h(x) = f(x)$

- 1) (0,5 pt) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) (0,5 pt) Tracer, dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(C_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1} .

Partie IV

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- 1) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 2) (0,75 pt) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $] -\infty, 0]$).

- 3) (0,75 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.