

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2012

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 0, -3)$ et $C(0, 2, -2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 1, 1)$ et de rayon 3.

1) a) (1,25 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ puis en déduire que $2x - y + 2z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (D) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

a) (0,5 pt) Montrer que

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (D) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Démontrer que le triplet de coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S) est $(-1, 2, -1)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 2 - i$, $b = 6 - 7i$ et $c = 8 + 3i$.

1) a) (0,75 pt) Montrer que : $\frac{c-a}{b-a} = i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A .

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω milieu du segment $[BC]$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) (0,5 pt) Vérifier que l'affixe du point Ω est $\omega = 7 - 2i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Montrer que $z' = -iz + 9 + 5i$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Montrer que le point C est l'image du point A par la rotation R .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (0,5 pt) Vérifier que $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 - v_n > 0$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$ et exprimer v_n en fonction de n .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

- 1) (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer trois boules rouges est $\frac{1}{22}$.

► Afficher / Masquer la solution

- 2) (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{3}{44}$.

► Afficher / Masquer la solution

- 3) (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer une boule rouge au moins est $\frac{37}{44}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) (0,75 pt) Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire que le point O est centre de symétrie de la courbe (C) .

► Afficher / Masquer la solution

- 2) (0,5 pt) Vérifier que $f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$. (il est préférable d'utiliser cette expression de $f(x)$ pour traiter les questions qui suivent)

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1,25 pt) Montrer que $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = \frac{3}{2}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que $y = \frac{3}{2}x$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O .

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,5 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) .

► Afficher / Masquer la solution

5) (1,5 pt) Construire les deux droites (D) et (T) et la courbe (C). (on rappelle que O est centre de symétrie de la courbe (C))

► Afficher / Masquer la solution

6) a) (0,75 pt) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En déduire que : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln 4 - \ln 3$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 2$.

► Afficher / Masquer la solution