

Examen national du baccalauréat

Session normale 2012

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(1, 1, -1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(3, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

1) (0,5 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 1)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,75 pt) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{k}$ puis vérifier que $x - z - 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Vérifier que : $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$ puis en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a) (0,25 pt) Démontrer que :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,25 pt) Démontrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est $(2, 0, 0)$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) En déduire le centre du cercle (Γ)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0,75 pt) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 12z + 61 = 0$

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les A , B , et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$, et $c = 2 + i$

a) (0,5 pt) Calculer $\frac{a-c}{b-c}$ puis déduire que les points A , C et D sont alignés

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est $1 + 5i$. Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est $d = 3 + 6i$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$ et que $\frac{3\pi}{4}$ est l'argument du nombre complexe $-1 + i$

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{CB}, \vec{CD}})$

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2. On tire au hasard, et simultanément, trois jetons de l'urne.

1) (1 pt) Soit A l'événement : « Les trois jetons tirés portent des nombres différents deux à deux ». Montrer que :

$$P(A) = \frac{5}{28}$$

► Afficher / Masquer la solution

2) (1 pt) Soit B l'événement : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 5 ». Montrer que :

$$P(B) = \frac{5}{56}$$

► Afficher / Masquer la solution

3) (1 pt) Soit C l'événement : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 4 ». Montrer que :

$$P(C) = \frac{3}{8}$$

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) (0,25 pt) Vérifier que : $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Montrer, par récurrence, que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) (0,75 pt) On utilisant la question 1), montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{10}{11}$, puis exprimer v_n en fonction de n

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Montrer que : $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et calculer la limite du suite (u_n)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

1) (0,75 pt) Montrer que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0; 1[$ puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,75 pt) Montrer que $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1; +\infty[$ puis déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$ Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) (0,5 pt) Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (On pourra écrire $\frac{f(x)}{x}$ sous la forme $\frac{x^2 - 1}{x} \ln x$) et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (1,25 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et interpréter géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ puis montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

3) (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,5 pt) Montrer que $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

► Afficher / Masquer la solution