

Examen national du baccalauréat

Session normale 2011

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Équations et inéquations logarithmiques	2,5 points
Exercice 2	Suites numériques	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	5 points
Exercice 4	Étude de fonctions et calcul intégral	9,5 points

Exercice 1 : Équations et inéquations logarithmiques (2,5 points)

1.a. (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 4x - 5 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation : $\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln(2x)$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (1 pt) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'inéquation : $\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On pose : $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 2.a. (1,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer v_n en fonction de n .

► Afficher / Masquer la solution

- 2.b. (1 pt) Montrer que $u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Nombres complexes (5 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 18z + 82 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 9 + i$, $b = 9 - i$ et $c = 11 - i$.

2.a. (1 pt) Montrer que $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle en B .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0,5 pt) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $4(1-i)$.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (1 pt) Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que : $AC \times BC = 4\sqrt{2}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.d. (1,5 pt) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Étude de fonctions et calcul intégral (9,5 points)

Partie I On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$.

I.1.a. (0,5 pt) Montrer que : $g'(x) = -xe^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

I.1.b. (0,75 pt) Montrer que la fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $] -\infty, 0]$ et vérifier que $g(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

I.2. (0,5 pt) En déduire que : $g(x) \leq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

Partie II Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 - x)e^x - x$, et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

II.1.a. (0,5 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

II.1.b. (0,75 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.a. (0,75 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$. (on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

II.2.b. (0,25 pt) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.a. (0,5 pt) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.b. (0,25 pt) Interpréter géométriquement le résultat : $f'(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.c. (0,5 pt) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

► Afficher / Masquer la solution

II.4. (0,5 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{3/2} > 3$).

► Afficher / Masquer la solution

II.5.a. (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C) et (D) se coupent au point $A(2; -2)$.

► Afficher / Masquer la solution

II.5.b. (0,25 pt) Étudier le signe de $f(x) + x$ sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.5.c. (0,25 pt) En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur $] -\infty; 2[$ et en-dessous de (D) sur $]2; +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

II.6.a. (0,5 pt) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique de coordonnées $(0; 2)$.

► Afficher / Masquer la solution

II.6.b. (1 pt) Construire la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

► Afficher / Masquer la solution

II.7.a. (1 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.7.b. (0,25 pt) En déduire, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

► Afficher / Masquer la solution