

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2010

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Exercice 5	Étude de fonctions et calcul intégral	8 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, -2, 0)$, $B(1, 1, -4)$ et $C(0, 1, -4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

1. (0.5 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 2, 3)$ et que son rayon est 5.

► Afficher / Masquer la solution

2.a. (1 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ et en déduire que $4y + 3z + 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.5 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

3. Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

3.a. (0.5 pt) Démontrer que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (0.25 pt) Démontrer que le triplet des coordonnées de H , point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) , est $(1, -2, 0)$.

► Afficher / Masquer la solution

3.c. (0.25 pt) Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et de la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

2.a. (0.5 pt) Montrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.25 pt) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R .

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.75 pt) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.

► Afficher / Masquer la solution

2.d. (0.5 pt) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit boules qui portent les nombres suivants : 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. (1.25 pt) Soient A et B les deux événements : A : « tirer deux boules portant le nombre 2 » et B : « tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 ». Montrer que $P(A) = \frac{3}{28}$ et que $P(B) = \frac{13}{28}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.

2.a. (0.25 pt) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.75 pt) Montrer que : $P(X = 1) = \frac{15}{28}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.75 pt) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (0.5 pt) Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.75 pt) Montrer que : $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

3. (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

4.a. (0.75 pt) Montrer par récurrence que : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

4.b. (0.5 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions et calcul intégral (8 points)

I. On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$.

I.1.a. (0.25 pt) Vérifier que : $3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

I.1.b. (0.5 pt) Montrer que : $g'(x) = \frac{(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

I.2.a. (0.25 pt) Vérifier que : $\frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

I.2.b. (0.5 pt) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$ sur $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

I.3.a. (0.5 pt) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

I.3.b. (0.5 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ (remarquer que $g(1) > 0$).

► Afficher / Masquer la solution

II. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm).

II.1. (1 pt) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.a. (0.5 pt) Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.b. (0.75 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

II.2.c. (0.5 pt) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3. (0.5 pt) Montrer que $y = 3(x - 1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1, 0)$.

► Afficher / Masquer la solution

II.4. (0.75 pt) Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont la détermination n'est pas demandée).

► Afficher / Masquer la solution

II.5.a. (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$ (poser : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x^2}$).

► Afficher / Masquer la solution

II.5.b. (0.5 pt) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ cm}^2$.

► Afficher / Masquer la solution