

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2009

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Exercice 5	Calcul intégral	2 points
Exercice 6	Étude de fonction	6 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(2, 2, -1)$, le plan (P) d'équation $2x + y + 2z - 13 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rayon 3.

1.a. (0.75 pt) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S) .

1.b. (0.75 pt) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .

2. Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) .

2.a. (0.75 pt) Démontrer que $\vec{u}(2, 1, 2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que $(6, -6, -3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.

2.b. (0.75 pt) Calculer $\frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A .

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 3 + 4i$, $b = 3 - 4i$, $c = 2 + 3i$ et $d = 5 + 6i$.

2.a. (0.5 pt) Calculer $\frac{d - c}{a - c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

2.b. (0.5 pt) Montrer que le nombre $p = 3 + 8i$ est l'afixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

2.c. (1 pt) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{d - p}{a - p}$ puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{PA, PD}\right)$ et que $PA = \sqrt{2}PD$.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient sept boules noires et deux boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

1. (0.5 pt) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
2. (1.5 pt) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{36}$ et $p(X = 1) = \frac{7}{18}$.
3. (1 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (1 pt) Vérifier que $1 - u_{n+1} = \frac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que $1 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
 - 2.a. (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$, puis exprimer v_n en fonction de n .
 - 2.b. (1 pt) Montrer que $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 : Calcul intégral (2 points)

1. (1 pt) Déterminer les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2 - 1)^{2009} dx = \frac{1}{2010}$.
2. (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 (2x + 1) \ln(x + 1) dx = 6 \ln 3 - 2$.

Exercice 6 : Étude de fonction (6 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$, et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.a. (0.5 pt) Vérifier que : $f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$ pour tout réel x .
- 1.b. (1 pt) Montrer que la fonction f est paire et que $f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ pour tout réel x .
- 1.c. (1 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
2. (0.5 pt) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 3.a. (1 pt) Montrer que : $f'(x) = \frac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.
- 3.b. (0.5 pt) Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que : $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 3.c. (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
4. (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on admettra que la courbe possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).