

Examen national du baccalauréat

Session normale 2008

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Problème : étude de fonctions, calcul intégral et suites	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux points $A(0, -1, 1)$ et $B(1, -1, 0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

- (1.25 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ et vérifier que A appartient à (S) .
- (1.25 pt) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et montrer que $x + y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB) .
- (0.5 pt) Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A .

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

- (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 6z + 34 = 0$$

- On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5i, \quad b = 3 - 5i \quad \text{et} \quad c = 7 + 3i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4 - 2i$.

- (0.75 pt) Montrer que $z' = z + 4 - 2i$ et vérifier que C est l'image du point A par la translation T .

- (0.5 pt) Montrer que $\frac{b-c}{a-c} = 2i$

- (0.75 pt) En déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une boîte contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'boîte.

1.a. (1 pt) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.

1.b. (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\frac{16}{21}$

2. (1 pt) On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'boîte. Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

Problème (11 points)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 \ln x$

1.a. (0.5 pt) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

1.b. (0.5 pt) Montrer que g est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

2. (0.5 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$).

II. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - (\ln x)^2$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (0.75 pt) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

2.a. (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

2.b. (0.75 pt) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (remarquer que : $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

2.c. (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

2.d. (0.25 pt) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) .

3.a. (0.75 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

3.b. (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3.c. (0.5 pt) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

4. (0.5 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

5. (1 pt) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on admet que $I(e, e - 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2,7$).

6.a. (0.5 pt) Montrer que : $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis montrer que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

6.b. (0.75 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.

6.c. (0.5 pt) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

III. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. (0.75 pt) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II.3.a.).

2. (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. (0.75 pt) En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.