

Cours — Chapitre 08

Rotation

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Définition d’une rotation — rotation réciproque — II. Image des figures usuelles par une rotation — III. Propriétés d’une rotation.

Durée indicative : 4 heures. **Prérequis :** trigonométrie, produit scalaire, calcul vectoriel, transformations du plan.

Hors programme : expression analytique d’une rotation, coordonnées, composée de deux rotations.

I. Définition d’une rotation — rotation réciproque

Activité 1

Soit O un point fixe du plan orienté et A, B deux points distincts de O .

1) Construire le cercle de centre O passant par A , puis le point A' de ce cercle tel que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2) Construire de même le point B' tel que $OB' = OB$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

3) Comparer les longueurs AB et $A'B'$, puis les angles orientés $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA'}; \overrightarrow{OB'})$.

► Afficher / Masquer la solution

::: {definition t=” (rotation)“} Soit O un point du plan orienté et α un réel. La **rotation de centre O et d’angle α** , notée $r(O; \alpha)$ ou r , est la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = r(M)$ défini par :

- $r(O) = O$;
- si $M \neq O$: $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \alpha [2\pi]$.

:::

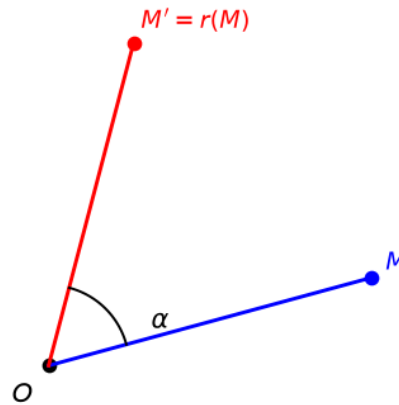


FIGURE 1 – Définition d'une rotation

Remarque 1

La rotation $r(O; -\alpha)$ est appelée **rotation réciproque** de $r(O; \alpha)$. On la note r^{-1} . Pour tout point N du plan :

$$r^{-1}(N) = M \iff r(M) = N.$$

En particulier $r^{-1} \circ r = \text{Id}$ et $r \circ r^{-1} = \text{Id}$.

Exemple 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit $r = r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$.

- 1) Vérifier que $r(C) = B$.
- 2) Construire le point $B' = r(B)$.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque 2

- 1) Si $\alpha \not\equiv 0 [2\pi]$, le centre O est l'**unique point invariant** par $r(O; \alpha)$. De plus O appartient à la médiatrice de tout segment $[MN]$ tel que $r(M) = N$.
- 2) Si $\alpha \equiv \pi [2\pi]$, alors $r(O; \alpha)$ est la **symétrie centrale** de centre O .
- 3) Si $\alpha \equiv 0 [2\pi]$, alors r est l'identité du plan.

II. Image des figures usuelles par une rotation

Activité 2

Soit (C) un cercle de centre A et de rayon R , et B un point de (C) . Soit $r = r\left(I; \frac{\pi}{2}\right)$ une rotation (où I est un point donné du plan). On pose $A' = r(A)$, $B' = r(B)$.

1) Montrer que $A'B' = R$.

2) Soit $M \in (C)$ et $M' = r(M)$. Montrer que M' appartient au cercle (C') de centre A' et de rayon R .

3) En déduire que $r((C)) = (C')$. Que dire de l'image de la droite (AB) ? du segment $[AB]$?

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 1 (images des figures usuelles)

Soit r une rotation et M, N, E, F des points du plan. Alors :

Figure	Image par r
Droite (MN)	$r((MN)) = (r(M) r(N))$
Demi-droite $[MN)$	$r([MN)) = [r(M) r(N))$
Segment $[MN]$	$r([MN]) = [r(M) r(N)]$
Cercle de centre M et de rayon R	cercle de centre $r(M)$ et de même rayon R
Triangle MNE	triangle $r(M)r(N)r(E)$
Quadrilatère $MNEF$	quadrilatère $r(M)r(N)r(E)r(F)$

Exemple 2

Soit $ABCD$ un carré de centre Ω tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit $r = r\left(\Omega; \frac{\pi}{2}\right)$.

- 1) Déterminer $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$ et $r(D)$.
- 2) En déduire l'image du carré $ABCD$ par r .

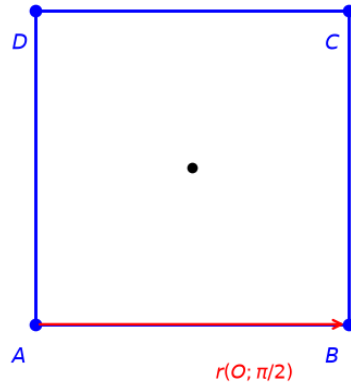


FIGURE 2 – Rotation d'un quart de tour autour du centre d'un carré

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

Si l'on prend plutôt $r\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ avec le même carré orienté, alors $r(B) = D$ (car $AB = AD$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$).

III. Propriétés d'une rotation**Propriété 2 (conservation)**

Soit $r = r(O; \alpha)$ une rotation. La rotation **conserve** :

1. les **distances** : $MN = r(M)r(N)$ (c'est une isométrie);
2. les **mesures d'angles orientés** : $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{EF}) = \theta [2\pi] \implies (\overrightarrow{r(M)r(N)}; \overrightarrow{r(E)r(F)}) = \theta [2\pi]$;
3. l'**alignement**, le **parallélisme**, l'**orthogonalité**;
4. les **coefficients de colinéarité** : $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{r(M)r(N)} = kr\overrightarrow{EF}$;
5. les **barycentres** (en particulier milieux et centres de gravité);
6. l'**appartenance** et l'**intersection** : $M \in (\mathcal{F}) \implies r(M) \in r((\mathcal{F}))$.

En particulier, une figure et son image ont la **même nature** (triangle équilatéral, carré, cercle, etc.).

Propriété 3 (angle et vecteurs)

Si r est une rotation d'angle α et si M, N sont distincts, alors

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{r(M)r(N)}) = \alpha [2\pi].$$

En particulier, si $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, alors $(MN) \perp (r(M)r(N))$.

Remarque 3 (existence d'une rotation)

Soient A, B, A', B' quatre points avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. S'il existe une rotation r telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, alors nécessairement $AB = A'B'$.

Réciproquement, si $AB = A'B'$ et $(A, B) \neq (A', B')$:

- le centre est l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ (lorsqu'elles sont sécantes) ;
- l'angle vérifie $\alpha = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) [2\pi]$.

Exemple 3

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Soit D un point de $[AB]$ et $r = r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$. On pose $E = r(D)$, $F = r(C)$.

- 1) Déterminer $r(B)$.
- 2) Montrer que $(DE) \parallel (BC)$.

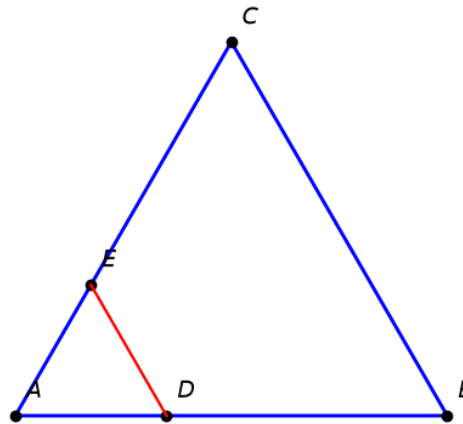


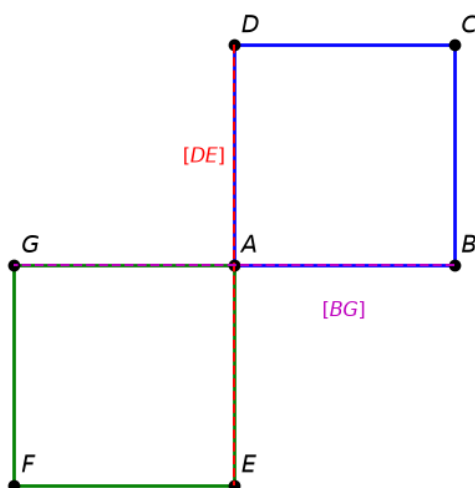
FIGURE 3 – Rotation dans un triangle équilatéral

► Afficher / Masquer la solution

Exemple 4

Soient $ABCD$ et $AEFG$ deux carrés tels que $AB = AE$, avec $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AG}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ (voir figure). Soit $r = r\left(A; -\frac{\pi}{2}\right)$.

- 1) Vérifier que $r(D) = B$ et $r(E) = G$.
- 2) En déduire $DE = BG$ et $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{BG}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$, puis $(DE) \perp (BG)$.
- 3) Soient I et J les milieux de $[DE]$ et $[BG]$. Montrer que $r(I) = J$.

FIGURE 4 – Deux carrés issus de A

► Afficher / Masquer la solution

Méthode

Pour montrer une égalité de longueurs, un parallélisme ou une orthogonalité avec une rotation :

1. Identifier une rotation $r(O; \alpha)$ adaptée (souvent un sommet d'un triangle isocèle/équilatéral ou le centre d'un carré).
2. Traduire les hypothèses par $r(M) = N$.
3. Appliquer conservation des distances, de l'angle (propriété 3), du milieu ou du barycentre.