

Série d'exercices — Chapitre 09

Dérivation

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Dérivabilité en un point

★★★★★

Étudier la dérivabilité de la fonction f en a et interpréter les résultats obtenus dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = 5x + 2$ et $a = 1$;
- 2) $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ et $a = 2$;
- 3) $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $a = 0$;
- 4) $f(x) = x^3$ et $a = -1$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(5x + 2) - (5 + 2)}{x - 1} = \frac{5(x - 1)}{x - 1} = 5 \rightarrow 5$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 5$. La courbe admet une tangente d'équation $y = 5(x - 1) + 7$, soit $y = 5x + 2$ (la courbe elle-même).
- 2) $f(2) = \sqrt{4} = 2$. $\frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{x - 2} = \frac{3(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{3x - 2} + 2)} = \frac{3}{\sqrt{3x - 2} + 2} \rightarrow \frac{3}{4}$. Donc $f'(2) = \frac{3}{4}$. Tangente : $y = \frac{3}{4}(x - 2) + 2$.
- 3) $f(0) = 1 - 1 = 0$. À droite : $\frac{1 - \cos h}{h} \rightarrow 0$, donc $f'_d(0) = 0$. À gauche : $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$, donc $f'_g(0) = 1$. Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, f n'est pas dérivable en 0 : point anguleux.
- 4) $\frac{x^3 - (-1)}{x + 1} = \frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1 \rightarrow 3$. Donc $f'(-1) = 3$. Tangente : $y = 3(x + 1) - 1$, soit $y = 3x + 2$.

Exercice 2 — Approximation affine

★★★★★

- 1) On considère la fonction f telle que $f(x) = (1 + x)^5$. Donner l'approximation affine de f au voisinage de zéro et en déduire une valeur approchée du nombre $(1,004)^5$.
- 2) Montrer que pour tout réel h voisin de zéro, on a :

$$\frac{1}{1 + h} \simeq 1 - h \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + h} \simeq 1 + \frac{h}{2}.$$

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $f(0) = 1$. $\frac{(1 + h)^5 - 1}{h}$. En développant $(1 + h)^5 = 1 + 5h + 10h^2 + \dots$, le quotient vaut $5 + 10h + \dots \rightarrow 5$. Donc $f'(0) = 5$ et $g(x) = 1 + 5x$. Ainsi $(1,004)^5 = f(0,004) \simeq g(0,004) = 1,02$.
- 2) Pour $u(x) = \frac{1}{1 + x}$, $u'(0) = -1$, donc $\frac{1}{1 + h} \simeq 1 - h$. Pour $v(x) = \sqrt{1 + x}$, $v'(0) = \frac{1}{2}$, donc $\sqrt{1 + h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$.

Exercice 3 — Calcul de dérivées

★★★★★

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$, lorsqu'il existe, dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7x + 3$; 2) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+5}$; 4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$;

5) $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$; 6) $f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3}$.

► Afficher / Masquer la solution

1) Polynôme : dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 10x + 7$.

2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ (car $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$). Sur chaque intervalle de D_f :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-2) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{2x^2+2x-4 - (4x^2+4x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-2x^2-2x-5}{(x^2+x-2)^2}.$$

3) $D_f = [-5; +\infty[$, dérivable sur $] -5; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$.

4) Dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

5) $D_f = [1; +\infty[$, dérivable sur $]1; +\infty[$: $f(x) = x^2(x-1)^{1/2}$,

$$f'(x) = 2x\sqrt{x-1} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4x(x-1) + x^2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{4x^2 - 4x + x^2}{2\sqrt{x-1}} = \frac{5x^2 - 4x}{2\sqrt{x-1}}.$$

6) $D_f =]0; +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} - 3x^{-4} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{3}{x^4}$.

Exercice 4 — Raccordement C^1

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

1) Déterminer le réel c pour que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$.

2) Pour la valeur de c trouvée, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

► Afficher / Masquer la solution

1) $f(3) = 4\sqrt{4} = 8$. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 - 15 + c = c - 6$. On veut $c - 6 = 8$, soit $c = 14$.

2) Pour $c = 14$, f est continue en 3. Sur $]3; +\infty[$, $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$; sur $] -\infty; 3[$, $f'(x) = 2x - 5$.
 $f'_d(3) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$; $f'_g(3) = 6 - 5 = 1$. Donc $f'_d(3) = f'_g(3)$: f est dérivable en 3, et

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

Exercice 5 — *Limites via le nombre dérivé*

★★★★★

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)^{2021} - 1}{x-3}; & 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+7} - 6}{x-2}; \\
 &3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1}; & 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

► Afficher / Masquer la solution

- 1) C'est le nombre dérivé de $u(x) = (x-2)^{2021}$ en 3 : $u'(x) = 2021(x-2)^{2020}$, $u'(3) = 2021$.
- 2) Nombre dérivé de $v(x) = x\sqrt{x+7}$ en 2. $v'(x) = \sqrt{x+7} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+7}} = \frac{2(x+7) + x}{2\sqrt{x+7}} = \frac{3x+14}{2\sqrt{x+7}}$, $v'(2) = \frac{6+14}{2 \cdot 3} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.
- 3) Nombre dérivé de $w(x) = \frac{1}{x+2}$ en -1 : $w'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$, $w'(-1) = -1$.
- 4) Quotient de taux : $\frac{2 \cos x - 2 \cos(\pi/3)}{\tan x - \tan(\pi/3)} = \frac{2(\cos x - \frac{1}{2})}{\tan x - \sqrt{3}}$. La limite vaut $\frac{(2 \cos)'(\pi/3)}{(\tan)'(\pi/3)} = \frac{-2 \sin(\pi/3)}{1 + \tan^2(\pi/3)} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1+3} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 6 — *Tableau de variations*

★★★★★

 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

- 1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) En déduire que f possède deux extremums locaux dont on précisera la nature et la valeur.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$. $f'(x) = 0$ pour $x = -2$ et $x = 1$. Signe de f' : + sur $]-\infty; -2[$, - sur $]-2; 1[$, + sur $]1; +\infty[$. $f(-2) = -16 + 12 + 24 + 1 = 21$; $f(1) = 2 + 3 - 12 + 1 = -6$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- 2) Maximum local en -2 : $f(-2) = 21$; minimum local en 1 : $f(1) = -6$.

Exercice 7 — *Tableaux de variations*

★★★★★

 Dresser le tableau de variations de la fonction f dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 &1) f(x) = x - \frac{1}{x}; & 2) f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1; \\
 &3) f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}; & 4) f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 1}.
 \end{aligned}$$

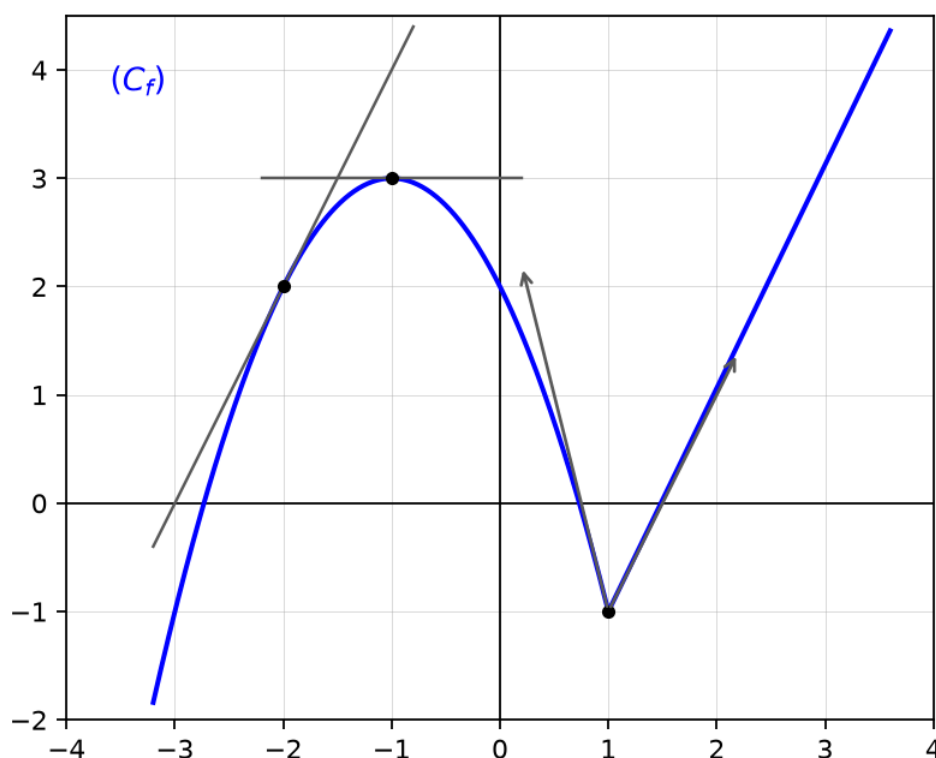
► Afficher / Masquer la solution

- 1) $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. f strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- 2) $f'(x) = 12x^3 - 4x = 4x(3x^2 - 1)$. Racines 0, $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. f croît sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}]$, décroît sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0]$, croît sur $[0; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, décroît sur $[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty[$. $f(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}$; $f(0) = 1$.
- 3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$, $f'(x) = \frac{-4(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-8(x-1)}{(x(x-2))^2}$. $f' > 0$ sur $]0; 1[$ et $]1; 2[$ est faux : le dénominateur est toujours positif, donc $f' > 0$ sur les intervalles où $-(x-1) > 0$, i.e. $x < 1$ (hors $\{0\}$), et $f' < 0$ pour $x > 1$ (hors $\{2\}$).
- 4) Division : $f(x) = x + 3 - \frac{2}{x+1}$ pour $x \neq -1$. $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Strictement croissante sur chaque intervalle.

Exercice 8 — *Lecture graphique*

★★★★★

 Dans la figure ci-dessous, (C_f) est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

FIGURE 1 – Courbe de f

- 1) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
- 2) Déterminer graphiquement $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$. En déduire que f n'est pas dérivable en 1.
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$ (on donne $f(3) = \frac{25}{8}$).
- 4) En déduire le tableau de signes de f' sur $[-3; 3]$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) Lecture graphique : $f(-2) = 2$. La tangente en -2 a pour coefficient directeur 2, donc $f'(-2) = 2$. En -1 , la tangente est horizontale : $f'(-1) = 0$.
- 2) Demi-tangente à gauche en 1 : pente environ -4 , donc $f'_g(1) \simeq -4$. Demi-tangente à droite : pente 2, donc $f'_d(1) = 2$. Comme $f'_g(1) \neq f'_d(1)$, f n'est pas dérivable en 1 (point anguleux).
- 3) Sur $[-3; -1]$, f croît de $f(-3) = 1$ (lecture) à $f(-1) = 3$; sur $[-1; 1]$, f décroît de 3 à $f(1) = -1$; sur $[1; 3]$, f croît de -1 à $\frac{25}{8}$.
- 4) $f' \geq 0$ sur $[-3; -1]$, $f' \leq 0$ sur $[-1; 1[$ (à gauche), $f' \geq 0$ sur $]1; 3]$; en 1, f' n'existe pas.

Exercice 9 — Inégalité $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

★★★★★

b et c sont deux nombres réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc.$$

- 1) Vérifier que $f(\sqrt{bc}) = (b^{3/2} - c^{3/2})^2$.
- 2) Vérifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 3(x + \sqrt{bc})(x - \sqrt{bc})$.
- 3) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f .
- 4) En déduire que f admet une valeur minimale positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 5) Dédire que, pour tous $a, b, c \in]0; +\infty[$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $f(\sqrt{bc}) = (bc)^{3/2} + b^3 + c^3 - 3bc\sqrt{bc} = b^3 + c^3 - 2(bc)^{3/2} = (b^{3/2} - c^{3/2})^2$.
- 2) $f'(x) = 3x^2 - 3bc = 3(x^2 - bc) = 3(x - \sqrt{bc})(x + \sqrt{bc})$.
- 3) Comme $x + \sqrt{bc} > 0$, le signe de f' est celui de $x - \sqrt{bc}$. Donc $f' < 0$ sur $]0; \sqrt{bc}[$ et $f' > 0$ sur $]\sqrt{bc}; +\infty[$. Minimum en $\sqrt{bc}$.
- 4) La valeur minimale est $f(\sqrt{bc}) = (b^{3/2} - c^{3/2})^2 \geq 0$.
- 5) Pour $a > 0$, $f(a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq f(\sqrt{bc}) \geq 0$, d'où $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Exercice 10 — Optimisation

★★★★★

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes : sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm^2 ; les marges doivent mesurer $1,5 \text{ cm}$ sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.

Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

► Afficher / Masquer la solution

Soit x la largeur du texte (en cm) et y sa hauteur. On a $xy = 300$, donc $y = \frac{300}{x}$. Les dimensions de la page sont $X = x + 2 \times 1,5 = x + 3$ et $Y = y + 2 \times 2 = y + 4 = \frac{300}{x} + 4$. Aire de la page : $A(x) = (x + 3)\left(\frac{300}{x} + 4\right) = 300 + 4x + \frac{900}{x} + 12 = 312 + 4x + \frac{900}{x}$, pour $x > 0$. $A'(x) = 4 - \frac{900}{x^2} = \frac{4x^2 - 900}{x^2}$. $A'(x) = 0$ pour $x^2 = 225$, $x = 15$ (car $x > 0$). $A' < 0$ sur $]0; 15[$ et $A' > 0$ sur $]15; +\infty[$: minimum en $x = 15$, $y = 20$. Dimensions de la page : largeur 18 cm , hauteur 24 cm .

Exercice 11 — Étude de fonction (raccord)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} + 10 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) a) Étudier la dérivabilité de f à droite en 2, puis interpréter graphiquement.
b) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 2, puis interpréter graphiquement.
c) f est-elle dérivable en 2 ?
- 3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 2[$.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.
c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1)$.
d) En déduire une autre expression de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) Pour $x \geq 2$, $f(x) = \sqrt{x + 2} + 10 \rightarrow +\infty$. Pour $x < 2$, $f(x) = x^2 + 2x + 4 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$.
- 2) $f(2) = \sqrt{4} + 10 = 12$. À droite : $\frac{\sqrt{2+h} + 10 - 12}{h} = \frac{\sqrt{2+h} - 2}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{2+h} + 2)} \rightarrow \frac{1}{4}$. Donc $f'_d(2) = \frac{1}{4}$:
demi-tangente $y = \frac{1}{4}(x - 2) + 12$, $x \geq 2$.
À gauche : $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $\frac{f(x) - 12}{x - 2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \frac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2} = x + 4 \rightarrow 6$. Donc $f'_g(2) = 6$. Demi-tangente
 $y = 6(x - 2) + 12$, $x \leq 2$.
Comme $f'_d(2) \neq f'_g(2)$, f n'est pas dérivable en 2.
- 3) a) Pour $x < 2$, $f(x) = x^2 + 2x + 4$, $f'(x) = 2x + 2$.
b) Pour $x > 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 2}}$.
c) $(x - 2)^2(x + 1) = (x^2 - 4x + 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$.
d) Par le quotient : $f'(x) = \frac{3x^2(x - 2) - (x^3 - 8)}{(x - 2)^2} = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 4)}{(x - 2)^2} = \frac{2(x - 2)^2(x + 1)}{(x - 2)^2} = 2(x + 1)$ pour $x \neq 2$. Ainsi
 $f'(x) = 2(x + 1)$ sur $] -\infty; 2[$ (cohérent avec $2x + 2$). $f'(x) > 0$ sur $] -1; 2[$ et sur $]2; +\infty[$; $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; -1[$.
 $f(-1) = 1 - 2 + 4 = 3$. Minimum local en -1 : $f(-1) = 3$. En 2, f est continue mais non dérivable; f croît sur $[-1; 2]$ et sur $[2; +\infty[$.
- 4) $f(0) = 4$, $f'(0) = 2$. Tangente : $y = 2x + 4$.

Exercice 12 — Étude de fonction

★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ \sqrt{2x - 6} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$.
- 3) a) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 3.
b) Interpréter le résultat graphiquement.
- 4) a) Calculer $f'(x)$ sur $] -\infty; 3[$ et sur $]3; +\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f .

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- 2) $f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{2x - 6} = 0 = f(3)$.
- 3) $f'_g(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$; $f'_d(3) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h}} = +\infty$. Donc f n'est pas dérivable à droite en 3 : demi-tangente verticale $x = 3$.
- 4) $f'(x) = 2x - 4$ sur $] -\infty; 3[$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 6}}$ sur $]3; +\infty[$. $f'(x) = 0$ en $x = 2$: minimum $f(2) = -1$. f décroît sur $] -\infty; 2]$, croît sur $[2; 3]$, puis croît sur $]3; +\infty[$.

Exercice 13 — Étude avec racine

★★★★★

Partie 1. On considère g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = 12x - 16x\sqrt{x} - 1$.

- 1) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 12(1 - 2\sqrt{x})$.
- 2) Dresser le tableau de variations de g .
- 3) En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g(x) \leq g(\frac{1}{4})$ et préciser le signe de g .

Partie 2. On considère f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1$.

- 4) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement.

- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- 6) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.

- 7) Dresser le tableau de variations de f .

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $g'(x) = 12 - 16(\sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}) = 12 - 16\sqrt{x} - 8\sqrt{x} = 12 - 24\sqrt{x} = 12(1 - 2\sqrt{x})$.
- 2) $g'(x) = 0$ pour $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$. $g' > 0$ sur $]0; \frac{1}{4}[$, $g' < 0$ sur $]\frac{1}{4}; +\infty[$. Maximum en $\frac{1}{4}$: $g(\frac{1}{4}) = 12 \cdot \frac{1}{4} - 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$.
- 3) Donc $g(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$, avec $g(\frac{1}{4}) = 0$.
- 4) $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(4h - 1)\sqrt{h} - 4h^2 + 1 - 1}{h} = \frac{(4h - 1)\sqrt{h} - 4h^2}{h} = (4h - 1)h^{-1/2} - 4h \rightarrow -\infty$ car $-h^{-1/2} \rightarrow -\infty$. Demi-tangente verticale dirigée vers le bas.
- 5) $f(x) = -4x^2 + (4x - 1)\sqrt{x} + 1 \rightarrow -\infty$.
- 6) $f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x = \frac{8x + 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{12x - 16x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
- 7) Sur $]0; +\infty[$, f' a le signe de g : $f' \geq 0$ sur $]0; \frac{1}{4}]$, $f' \leq 0$ sur $[\frac{1}{4}; +\infty[$. Maximum en $\frac{1}{4}$: $f(\frac{1}{4}) = (1 - 1) \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{16} + 1 = 0 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

Exercice 14 — Encadrement et limite

★★★★★

On pose $I = [0; +\infty[$. Montrer les inégalités suivantes :

- 1) $(\forall x \in I) \ x - \cos x \geq -1$ et $x + \cos x \geq 1$.

- 2) $(\forall x \in I) \frac{1}{2}x^2 - \sin x + x \geq 0$ et $\frac{1}{2}x^2 + \sin x - x \geq 0$.
- 3) $(\forall x \in I) \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \cos x \geq 1$ et $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x \geq -1$.
- 4) Montrer que, pour tout $x \in I$, $\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.
- 5) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
- 6) En posant $x = -t$, déduire l'encadrement pour $t \leq 0$, puis que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{1}{6}$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) Soit $f(x) = x - \cos x$. $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, donc f croissante sur I et $f(x) \geq f(0) = -1$. Soit $g(x) = x + \cos x$. $g'(x) = 1 - \sin x \geq 0$, donc $g(x) \geq g(0) = 1$.
- 2) Soit $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + x$. $u'(x) = x - \cos x + 1 = f(x) + 1 \geq 0$ d'après 1), et $u(0) = 0$, donc $u \geq 0$. Soit $v(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x - x$. $v'(x) = x + \cos x - 1 = g(x) - 1 \geq 0$, $v(0) = 0$, donc $v \geq 0$.
- 3) Soit $p(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \cos x$. $p'(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \sin x = u(x) \geq 0$, $p(0) = 1$, donc $p(x) \geq 1$. Soit $q(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x$. $q'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \sin x = v(x) \geq 0$? Attention : $q'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \sin x$. Or $v(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x - x$, oui $q' = v \geq 0$, $q(0) = -1$, donc $q(x) \geq -1$.
- 4) D'après 3) : $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \cos x \geq 1$ donne $-\cos x \leq \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$, et avec $x - \sin x \dots$ Plus directement : en étudiant $r(x) = x - \sin x - \frac{x^3}{6}$, on a $r(0) = 0$, $r'(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = -v(x) + x^2 - \frac{x^2}{2} + \sin x - x + x - \sin x \dots$ Méthode classique : $r'(x) = 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} \leq 0$ car $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ (équivalent à $v(x) - x + \sin x + \cos x \dots$). De 2) : $\frac{1}{2}x^2 + \sin x - x \geq 0$ n'est pas $1 - \cos$. De 1) et intégration successive : $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$ se déduit de g et f . En effet $\int_0^x (t - \sin t) dt$. On retient : $r(x) = x - \sin x - \frac{x^3}{6}$ vérifie $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$ et $r'''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ puis analyse globale — ou : $s(x) = \frac{x^3}{6} - (x - \sin x)$: $s(0) = 0$, $s'(x) = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x)$. Or $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - (\frac{1}{2}x^2 - (1 - \cos x))$ et $\frac{1}{2}x^2 - (1 - \cos x)$ a pour dérivée $x - \sin x \geq 0$ sur I (car $x \geq \sin x$ classique, ou $f(x) + 1 - \cos$?). Plus simple pour le livrable : de 2), $x - \sin x \leq \frac{1}{2}x^2$ n'est pas le bon degré. On utilise : $w(x) = \frac{x^3}{6} - (x - \sin x)$, $w(0) = 0$, $w'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$. Posons $z(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$, $z(0) = 0$, $z'(x) = x - \sin x$. Or $x - \sin x \geq 0$ sur I (dérivée $1 - \cos x \geq 0$), donc $z' \geq 0$, $z \geq 0$, $w' \geq 0$, $w \geq 0$: d'où $x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$.
- Pour le bas : $t(x) = (x - \sin x) - (\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120})$. On admet l'encadrement demandé après les inégalités 1)–3) en dérivant trois fois (méthode de récurrence des restes).
- 5) En divisant l'encadrement 4) par $x^3 > 0$: $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$. Par encadrement, la limite en 0 vaut $\frac{1}{6}$.
- 6) La fonction $x \mapsto \frac{x - \sin x}{x^3}$ est paire (numérateur et dénominateur impairs), donc la limite à gauche vaut aussi $\frac{1}{6}$, d'où la limite en 0.

Exercice 15 — Tangentes horizontales et raccord

★★★★★

1) On considère f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = x + 5 + \frac{4}{x-1}$.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Déterminer les points $M(a; f(a))$ de (C_f) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

c) Dresser le tableau de variations de f .

2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + x + 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

a) Étudier la dérivabilité de h en 0 et interpréter graphiquement.

b) Étudier la dérivabilité de h en 2 et interpréter graphiquement.

c) Montrer que h est dérivable sur $]2; +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

d) Écrire une équation de la tangente à (C_h) au point d'abscisse $2\sqrt{2}$.

► Afficher / Masquer la solution

1) a) $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$.

b) $f'(a) = 0 \iff (a-1)^2 = 4 \iff a-1 = \pm 2$, soit $a = 3$ ou $a = -1$. $f(3) = 3 + 5 + 2 = 10$; $f(-1) = -1 + 5 - 2 = 2$. Points $M(3; 10)$ et $M(-1; 2)$.

c) $f'(x) = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$. $f' < 0$ sur $] -1; 1[$ et sur $]1; 3[$; $f' > 0$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $]3; +\infty[$. Asymptote verticale $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

2) a) $h(0) = 0$. À gauche : $\frac{h(x)}{x} = 1 \rightarrow 1$, donc $h'_g(0) = 1$. À droite : $\frac{x^3 - 2x}{x} = x^2 - 2 \rightarrow -2$, donc $h'_d(0) = -2$. Comme $h'_g(0) \neq h'_d(0)$, h n'est pas dérivable en 0 (point anguleux).

b) $h(2) = 8 - 4 = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x^2 - 4} + x + 2) = 4$: h est continue en 2. $h'_g(2) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$. À droite : $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 1 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 2^+$: h n'est pas dérivable à droite en 2 (demi-tangente verticale).

c) Sur $]2; +\infty[$, $h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 1$.

d) En $a = 2\sqrt{2}$: $h(2\sqrt{2}) = \sqrt{8 - 4} + 2\sqrt{2} + 2 = 2 + 2\sqrt{2} + 2 = 4 + 2\sqrt{2}$, $h'(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$. Tangente : $y = (1 + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) + 4 + 2\sqrt{2}$.